第 10 卷 第 11 期
2005 年 11 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 10, No. 11
Nov., 2005

基于 EM 的直方图逼近及其应用

邹丹平[1)] 冯 涛[2)] 李咸伟[3)] 刘其真[1)]

1) (复旦大学计算机科学与工程系,上海 200433) 2) (上海第二工业大学,上海 200041)
3) (宝钢技术中心,上海 201900)

摘 要 由于直方图一般是图像灰度或者其他分量的统计信息,因此分析图像的直方图是图像处理中的一个实用方法。直方图逼近是直方图分析方法之一,一般利用若干高斯分布函数来对直方图进行逼近。如何得到各个高斯分布函数的参数是问题的难点,解决此问题的一条途径把直方图逼近问题转化为统计学中的混合模型参数估计问题。文章首先采用 EM(数学期望最大化)方法解决了这个问题,然后介绍了基于 EM 的直方图逼近方法在最优阈值化、直方图成份分析方面的应用。

关键词 直方图逼近 混合模型 数学期望最大化 最优阈值化

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2005)11-1458-04

Histogram Approximation Based on Expectation Maximization Algorithm and Its Application

ZOU Dan-ping[1)], FENG Tao[2)], LI Xian-wei[3)], LIU Qi-zhen[1)]

1) (*Dept. of Computer Science and Engineering, Fudan University, Shanghai* 200433)
2) (*Shanghai Second Polytechnic University, Shanghai* 200041)
3) (*Baosteel Technology Center, Shanghai* 201900)

Abstract Histogram is commonly the statistical information about gray level or other chromatic components of image. Analyzing the histogram of image is a useful method in image processing. Adopting several probability density functions (PDFs) with Gaussian distribution to approximate the histogram is one way for histogram analyzing. But how to acquire the parameters of these distributions remains a hard issue. This paper uses expectation maximization algorithm to estimate the parameters by converting histogram apporximation problem into Guassian mixture models problem in statistics, and then introduces its application in optimal thresholding and histogram component analysis.

Keywords histogram approximation, mixture models, expectation maximization, optimal thresholding

1 引 言

由于直方图包含了图像的灰度或者其他颜色分量分布的信息,因此适当对直方图进行分析可以得到一些有用的信息,比如对直方图的形状进行分析可以得到图像分割的全局阈值。利用多个高斯分布的叠加来对直方图进行逼近是直方图分析的重要方法之一。文献[1]提出将一种利用最小平方误差的准则来对直方图进行逼近的方法运用于 MR 脑图像的分割。该方法用 M 个高斯分布叠加来得到逼近的结果(如式(1)所示)。

$$h_{aprox}(x) = \sum_{i=1}^{M} a_i \exp\left[\frac{-(x-\mu_i)^2}{2\delta_i^2}\right] \tag{1}$$

其中,a_i、μ_i、δ_i 表示第 i 个高斯分布的参数,x 表示灰度。设 $h(x)$ 为所要逼近的直方图,定义的一个拟合度函数 F,如式(2)所示,

收稿日期:2005-08-16;**改回日期**:2005-09-08

第一作者简介:邹丹平(1982~),男。2003 年获华中科技大学工学学士学位,现为复旦大学计算机科学与工程系硕士研究生。主要研究方向为图像处理与模式识别。E-mail: dpzou@yeah.net

$$F = \sum_{x=0}^{N} [h_{aprox}(x) - h(x)]^2 \tag{2}$$

根据最小二乘法不断对参数进行迭代,直到迭代稳定为止。有关用迭代方法求解最小二乘法问题来估计非线性参数可以在文献[2]中找到。此方法是从数据建模拟合曲线的角度来进行思考的。本文换一种思路,把原问题转换为混合模型参数估计问题,提出用基于期望值最大化(Expectation Maximization,简称 EM)的方法来对直方图进行逼近。

2 原理与公式推导

2.1 基于直方图的混合模型建模

假设图像含有 N 个像素,样本 $x_i(i=1,\cdots,N)$ 为第 i 个像素点的灰度。设图像中存在 M 个待识别的类,且每个类的灰度分布都服从高斯分布,那么样本 x_i 出现且属于类 j 的联合事件 (x_i,j_i) 就构成完全数据集,其概率分布为

$$P(x_i,j_i) = P(x_i \mid j)P_j(令\ j = j_i) \tag{3}$$

其中

$$P(x \mid j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left[-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] \tag{4}$$
$$\sum_{j=1}^{M} P_j = 1(令\ x = x_i)$$

令 $\boldsymbol{\theta} = (\mu_1,\cdots\mu_M,\sigma_1,\cdots\sigma_M)^{\mathrm{T}}$,则由 (x_i,j_i) 所构成的完全数据集的对数似然函数为

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} [\ln P(x_i \mid j,\boldsymbol{\theta}) + \ln P_j] \tag{5}$$

设 $\boldsymbol{L}$ 为图像的灰度集合(一般为 $0,\cdots,255$),$h(x)$ 为图像直方图,其中 $x \in \boldsymbol{L}$,则式(5)又可化为

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{x\in L} \{h(x)[\ln P(x \mid j,\boldsymbol{\theta}) + \ln P_j]\} \tag{6}$$

这样在下面的 EM 算法中就可以脱离图像,仅对直方图进行运算。

2.2 EM 算法估计参数

EM 算法是对不完全数据集进行参数估计的一个有效工具,它是一个迭代求解参数的过程。其中每个过程可分成以下两个步骤:第 1 步是 E 步,即根据上一步的结果来估算完全数据集似然函数的期望值;第 2 步是 M 步,即求出让完全数据集的似然函数期望最大化的参数;然后反复这个两个步骤直到参数迭代稳定为止。关于 EM 算法的详细介绍可以参考文献[4]。令 $\boldsymbol{\Theta} = (\boldsymbol{\theta}^{\mathrm{T}},p_1,\cdots,p_M)^{\mathrm{T}}$ 包含所有要估算参数的参数向量,$\boldsymbol{\Theta}^{(t)}$ 为第 t 次迭代步骤所估计的参数向量。以下为 EM 算法逼近直方图的具体实现。

(1) E 步,求完全数据集数学期望值

$$\begin{aligned} Q(\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\Theta}^{(t)}) &= \mathrm{E}[l(\boldsymbol{\theta}) \mid \boldsymbol{\Theta}^{(t)}] \\ &= \sum_{j=1}^{M} P^{(t)}(j \mid x)l(\boldsymbol{\theta}) \end{aligned} \tag{7}$$

其中,$P^{(t)}$ 表示以第 t 次迭代结果 $\boldsymbol{\Theta}^{(t)}$ 作为参数的概率密度分布函数。由式(4)式(6)式(7)联立得

$$Q(\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\Theta}^{(t)}) = \sum_{x\in L}\sum_{j=1}^{M} P^{(t)}(j \mid x)h(x) \times \left[\ln(P_j) - 0.5\ln(2\pi) - \ln(\sigma_j) - \frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}\right] \tag{8}$$

(2) M 步,求出让 $Q(\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\Theta}^{(t)})$ 最大化的参数 $\boldsymbol{\Theta}$。对于 μ_j,σ_j 等参数可以通过直接对式(8)求偏导得出,即

$$\mu_j = \frac{\sum_{x\in L} h(x)P^{(t)}(j \mid x)x}{\sum_{x\in L} h(x)P^{(t)}(j \mid x)}, \qquad \sigma_j = \frac{\sum_{x\in L} h(x)P^{(t)}(j \mid x)(x-\mu_j)^2}{\sum_{x\in L} h(x)P^{(t)}(j \mid x)} \tag{9}$$

对于参数 P_j,可利用限制条件 $\sum_{j=1}^{M} P_j = 1$,用拉格朗日乘数法求出

$$P_j = \frac{\sum_{x\in L} h(x)P^{(t)}(j \mid x)}{\sum_{x\in L} h(x)} \tag{10}$$

其中 $P^{(t)}(j \mid x)$ 可以利用上一次迭代的结果 $\mu^{(t)}$,$\sigma_j^{(t)}$,$P_j^{(t)}$,再利用贝叶斯公式式(11)求得,即

$$P^{(t)}(j \mid x) = \frac{P^{(t)}(x \mid j)P_j^{(t)}}{\sum_{j=1}^{M} P^{(t)}(x \mid j)P_j^{(t)}} \tag{11}$$

重复(1)、(2)两个步骤,直到参数 $\boldsymbol{\Theta}$ 迭代稳定为止。最后即可得到逼近的直方图

$$h_{aprox}(x) = N\sum_{j=1}^{M} P(x \mid j)P_j \tag{12}$$

一般情况下,灰阶集合 $\boldsymbol{L}$ 为 0 到 255 的整数。在实际运用中,可以取直方图的部分区间进行估算。也就是说,设直方图的灰度范围为 $\boldsymbol{W}$,首先取灰度子集 $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{W}$ 作为感兴趣区域,然后对各类参数进行估算。

3 应用

3.1 最优阈值化

阈值分割方法是图像处理中一个基本的方法，它的优点是简单而高效，已广泛运用于各种图像分割问题当中。阈值分割的难点在于如何获取阈值，而且阈值的选取恰当与否直接影响到分割结果的好坏。通常阈值选取是通过对图像的直方图进行分析来得出结果的。一种很有代表性的阈值选取方法是模式方法(mode method)，即选取直方图峰值间的极小值点作为阈值。这种方法在某些场合下虽可以得到很好的结果，但如果在各对象之间的灰度比较接近的情况下，该方法将无法得到阈值[3]。而最优阈值化方法则很好地解决了这个问题，因为它将各对象的灰度分布看成是高斯分布，最优阈值就是各分布之间的最小概率处。

利用 EM 算法对直方图进行逼近，可得到式(12)，然后按照多类贝叶斯判别准则，与类 j 对应的判别函数为 $g_j(x) = P(x|j)P_j$。如果 $g_j(x) = \max\{g_1(x), \cdots, g_M(x)\}$，则把 x 判为类 j。一般情况下，只要各类的概率分布交叠情况不是太严重，就可把各类按灰度均值 μ_j 从小到大排列，其相邻两类 j 和 $j+1$ 之间的阈值 T 可以根据 $g_j(x)$ 与 $g_{j+1}(x)$ 的相交点来确定(如图 1 所示)。

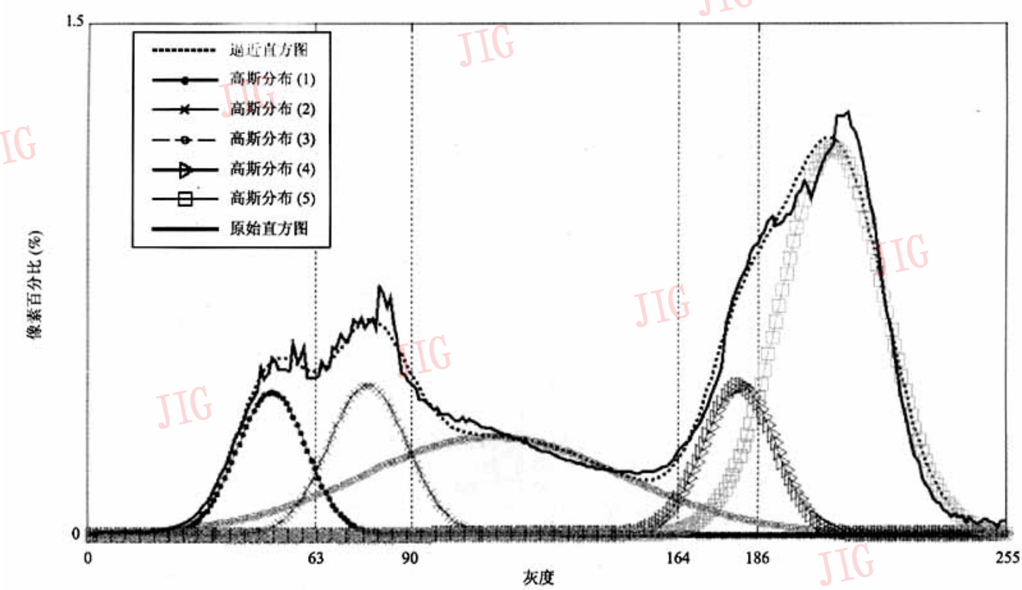


图 1 利用直方图逼近来确定最优阈值

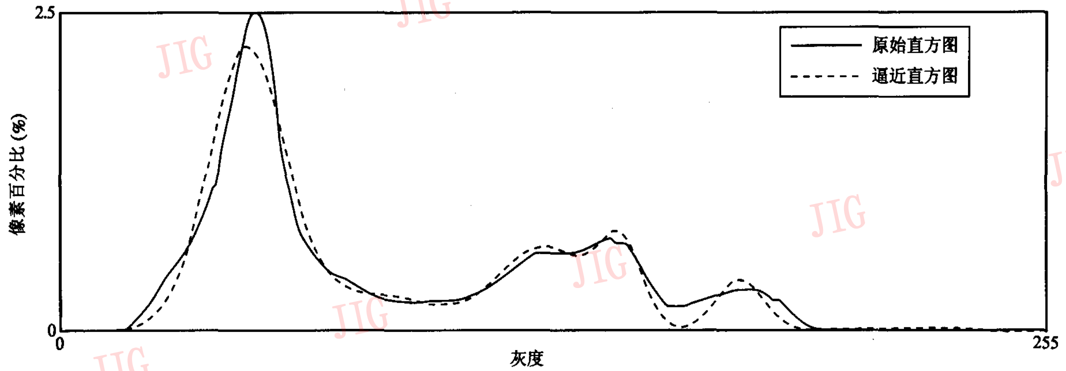
Fig. 1 Optimal thresholding by histogram approximation

(实线为原始直方图，虚线为逼近直方图。其中有标识划线的曲线为 gauss 分量，它们叠加后得到逼近直方图，它们的交点构成最优阈值。此时 $M=5$，取迭代误差为 10^{-3}，运用 EM 算法平均经过 200 次迭代可以达到稳定。)

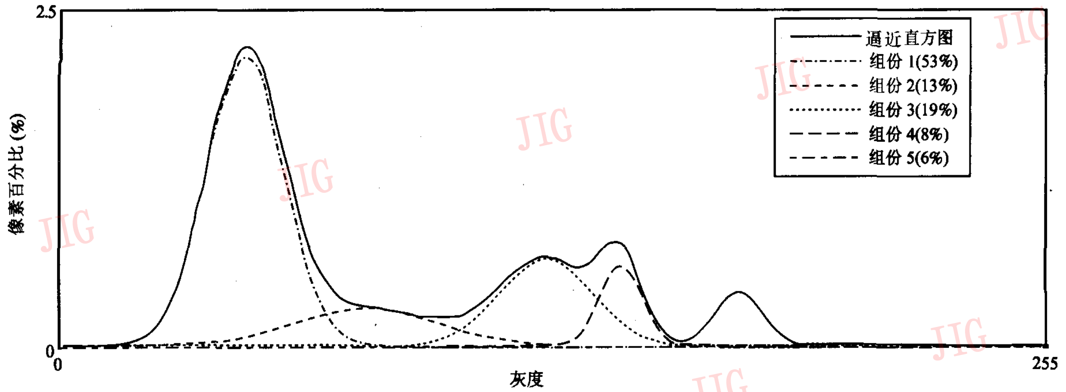
3.2 直方图成份分析

在许多矿相图像分析运用中，同一种类型的样品图像，其直方图往往是分析和区别样品的一个重要的特征。由于大部分从样品图像的直方图中可以推算出样品的各成份的含量，因而可以据此完成测量和识别。

图 2 为对某样品的灰度直方图的分析。由于该直方图是对同一样品不同位置采集的 200 张 800 × 800 大小图像进行统计出来的，样品包含 5 种不同反射率的组份，每种组份表现出来的灰度都可以用高斯分布来进行建模，所以该直方图可以看成是 5 个不同的高斯分布的逼近结果。通过 EM 算法进行参数估算，可以得出每种组份存在的概率，这样就得到了样品成份百分比的一种估算。经过对大批不同样品进行的实验结果表明，该估算结果与样品组分人工分析结果的基本符合，而且该方法比人工分析方法稳定。



(a) 样品累计直方图与逼近结果



(b) 逼近结果与各组份含量示意

图 2 对某矿相样品灰度直方图的分析

Fig. 2 Histogram analyzing on mineral pictures

($M=5$,取迭代误差为 10^{-3},经过平均 150 次左右可以达到稳定。得出的 P_j 依次为 53%、13%、19%、8%、6%,分别对应各组份的含量)

4 结 论

EM 算法是求解不完全数据集统计参数的一种迭代方法。本文首先从统计学的混合模型来考虑直方图逼近问题,并把 EM 算法运用在直方图逼近上,为直方图逼近提供了一种新思路;然后运用直方图逼近方法来实现阈值最优化和直方图分析。试验结果表明,用 EM 算法解决直方图逼近问题计算复杂度不高,在初始参数选择得当的前提下,可以很快收敛,其估算出来的参数也具有实际意义,同时其中的各类概率 P_j 可以直接运用于直方图成份估算当中。

参考文献(References)

1 Frank R J, Grabowski T J, Damasio H. Voxelvise percentage tissue segmentation of human brain MRI[A]. In: 25th Annual Meeting, Society for Neuroscience, Society of Neuroscience[C], Washington, 1995:694.

2 Marquardt D W. An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters [J]. Jounal of ther Society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, (11): 431 ~ 444.

3 Milan Sonka, Vaclav Hlavac, Roger Boyle. Image processing, analysis, and machine vision (second Edition, Chinese version) [M]. Beijing: Posts and Telecom Press, 2003:87. [Milan Sonka, Vaclav Hlavac, Roger Boyle. 艾海舟,武勃等译. 图像处理、分析与机器视觉(第二版)[M]. 北京:人民邮电出版社, 2003:87.]

4 Bilmes J A. A gentle tutorial of the EM algorithm and its application to parameter estimation for gaussian mixture and hidden markov models [R]. Technical Report: ICSI. TR-97-02, International Computer Science Institute, Berkeley CA, USA, 1998.